Arkimedes' kvægproblem

Solgudens kvæg kan opdeles i fire grupper baseret på deres farve, nemlig hvidt, sort, rødt og broget kvæg. Om antallet af hvide tyre vides, at det er lig med halvdelen plus en tredjedel af de sorte tyre plus antallet af røde tyre. Ligeledes vides det, at antallet af de sorte tyre er lig med en fjerdedel plus en femtedel af de brogede tyre plus, igen, antallet af røde tyre. Endelig gælder det, at antallet af de brogede tyre er lig med en sjettedel plus en syvendedel af de hvide tyre plus, atter igen, antallet af røde tyre.

Om fordelingen af køer vides, at antallet af hvide køer er lig med en tredjedel plus en fjerdedel af det sorte kvæg, antallet af sorte køer er lig med en fjerdedel plus en femtedel af det brogede kvæg, antallet af brogede køer er lig med en femtedel plus en sjettedel af det røde kvæg, og, endelig, at antallet af røde køer er lig med en sjettedel plus en syvendedel af det hvide kvæg.

Hvad er det mindste hele antal tyre og køer af hver farve?

Løsning - antal tyre

Hvis vi kalder antallet af hvide tyre for $\mathrm{H_t}$, antallet af sorte tyre for $\mathrm{S_t}$, antallet af brogede tyre for $\mathrm{B_t}$ og antallet af røde tyre for $\mathrm{R_t}$, kan første del af opgaven udtrykkes ved følgende tre ligninger med fire ubekendte:

$$H_t = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)S_t + R_t = \frac{5}{6}S_t + R_t$$

$$S_t = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)B_t + R_t = \frac{9}{20}B_t + R_t$$

$$B_t = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)H_t + R_t = \frac{13}{42}H_t + R_t$$

1. Substituer $\mathrm{S_t}$ og $\mathrm{B_t}$ i $\mathrm{H_t}$:

$$H_t = \frac{5}{6}\left(\frac{9}{20}\left(\frac{13}{42}H_t + R_t\right) + R_t\right) + R_t = \frac{5 \times 9 \times 13}{6 \times 20 \times 42}H_t + \frac{5 \times 9}{6 \times 20}R_t + \frac{5}{6}R_t + R_t$$

$$= \frac{585}{5040}H_t + \frac{45+100+120}{120}R_t \Leftrightarrow \frac{5040-585}{5040}H_t = \frac{265}{120}R_t \Leftrightarrow$$

$$H_t = \frac{742}{297} R_t$$

2. Substituer $\mathrm{H_t}$ i $\mathrm{B_t}$:

$$B_t = \frac{13}{42}\left(\frac{742}{297} R_t\right) + R_t = \frac{9646 + 12474}{12474} R_t = \frac{1580}{891} R_t$$

3. Substituer $\mathrm{B_t}$ i $\mathrm{S_t}$:

$$S_t = \frac{9}{20}\left(\frac{1580}{891} R_t\right) + R_t = \frac{14220 + 17820}{17820} R_t = \frac{178}{99} R_t$$

4. Mindste fællesnævner for $\mathrm{H_t}$, $\mathrm{B_t}$ og $\mathrm{S_t}$ er 891, hvilket betyder at det mindste antal røde tyre $\mathrm{R_t}$ er 891. Indsat i de tre reducerede ligninger fås:

$$H_t = 2226, B_t = 1580\ og\ S_t = 1602.$$

Løsning - antal køer

Kalder vi nu yderligere antallet af hvide køer for H_k, antallet af sorte køer for S_k, antallet af brogede køer for B_k og antallet af røde køer for R_k, kan anden del af opgaven udtrykkes ved følgende fire ligninger, hvor det fundne antal tyre er indsat:

$$H_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(S_t + S_k) = \frac{7}{12}(1602 + S_k)$$

$$S_k = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(B_t + B_k) = \frac{9}{20}(1580 + B_k)$$

$$B_k = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(R_t + R_k) = \frac{11}{30}(891 + R_k)$$

$$R_k = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(H_t + H_k) = \frac{13}{42}(2226 + H_k)$$

1. Substituer S_k, B_k og R_k i H_k:

$$H_k = \frac{7}{12}\left(1602 + \left(\frac{9}{20}\left(1580 + \left(\frac{11}{30}\left(891 + \left(\frac{13}{42}(2226 + H_k)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{7 \times 1602}{12} + \left(\frac{7 \times 9 \times 1580}{12 \times 20} + \left(\frac{7 \times 9 \times 11 \times 891}{12 \times 20 \times 30} + \left(\frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 2226}{12 \times 20 \times 30 \times 42} + \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13}{12 \times 20 \times 30 \times 42} H_k\right)\right)\right)$$

$$= \frac{7 \times 1602 \times 20 \times 30 \times 42 + 7 \times 9 \times 1580 \times 30 \times 42 + 7 \times 9 \times 11 \times 891 \times 42 + 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 2226}{12 \times 20 \times 30 \times 42} + \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13}{12 \times 20 \times 30 \times 42} H_k$$

$$= \frac{454000680}{302400} + \frac{9009}{302400} H_k \Leftrightarrow \frac{293391}{302400} H_k = \frac{454000680}{302400} \Leftrightarrow H_k = \frac{454000680}{293391} = \frac{7206360}{4657}$$

2. Substituer H_k i R_k:

$$R_k = \frac{13}{42}\left(2226 + \frac{7206360}{4657}\right) = \frac{13}{42}\left(\frac{2226 \times 4657 + 7206360}{4657}\right) = \frac{13 \times 17572842}{42 \times 4657} = \frac{13 \times 418401}{4657} = \frac{5439213}{4657}$$

3. Substituer R_k i B_k:

$$B_k = \frac{11}{30}\left(891 + \frac{5439213}{4657}\right) = \frac{11}{30}\left(\frac{891 \times 4657 + 5439213}{4657}\right) = \frac{11 \times 9588600}{30 \times 4657} = \frac{11 \times 319620}{4657} = \frac{3515820}{4657}$$

4. Substituer B_k i S_k:

$$S_k = \frac{9}{20}\left(1580 + \frac{3515820}{4657}\right) = \frac{9}{20}\left(\frac{1580 \times 4657 + 3515820}{4657}\right) = \frac{9 \times 10873880}{20 \times 4657} = \frac{9 \times 543694}{4657} = \frac{4893246}{4657}$$

5. Da 4657 er et primtal og mindste fællesnævner, kan det mindste antal hele tyre, køer og kvæg aflæses af følgende tabel:

	Tyre		Køer	Kvæg
Hvide	2.226 x 4.657 =	10.366.482	7.206.360	17.572.842
Sorte	1.602 x 4.657 =	7.460.514	4.893.246	12.353.760
Brogede	1.580 x 4.657 =	7.358.060	3.515.820	10.873.880
Røde	891 x 4.657 =	4.149.387	5.439.213	9.588.600
I alt		29.334.443	21.054.639	50.389.082

De viste antal kan multipliceres med det samme vilkårlige heltal *k*.

Dette er kun første del af Arkimedes' kvægproblem.

Han fortsætter, at man ikke kan kaldes uvidende om tal, men alligevel ikke kan regnes for vis, hvis man kan løse opgaven, og indfører to yderligere konditioner:

> Hvis de hvide og sorte tyre blandes, skal deres samlede antal kunne angives i et kvadrat med lige mange rækker og søjler, og hvis de brogede og røde tyre blandes, skal deres samlede antal kunne angives i en trekant, hvor antallet af tyre i hver række forøges med 1.

Først når du han løst denne del også, skal du krones med ære, slutter Arkimedes.

Udtrykt i to ligninger skal det yderligere gælde, at:

$$(H_t + S_t)k = n^2$$

$$(B_t + R_t)k = \frac{m(m+1)}{2}$$

Løsningen, som ikke skal bringes her, blev først fundet i 1965. Det samlede antal kvæg kan udtrykkes i et tal bestående af 206.545 cifre.

Referencer: http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html.